TD 4 - Homotopies et rétractions

Notions du cours.

- Homotopie, homotopie relative, équivalence d'homotopie.
- Espaces contractiles, rétracte, rétracte par déformation, rétracte par déformation forte.
- Cofibrations, propriété d'extension des homotopies, adjonction cellulaire.

Dans la suite, on pourra considerer une q-sphère $\mathbb{S}^q$ comme plongée dans la n-sphère avec $q < n$, par l'application $\mathbb{S}^q \ni (x_0, \dots, x_q) \mapsto (x_0, \dots, x_q, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$.

Homotopies.

Exercice 1. Soient X, Y deux espaces topologiques et f une application continue $f : X \to Y$.

(a) Montrer que s'il existe deux applications continues $g, h : Y \to X$ telles que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ et $h \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ alors f est une équivalence d'homotopie.

(b) Plus généralement, montrer que le résultat subsiste si $f \circ g$ et $h \circ f$ sont seulement des équivalences d'homotopie.

Exercice 2. Soit X un espace topologique. Montrer que deux applications continues $f_0, f_1 : X \to \mathbb{S}^n$ qui satisfont $f_0(x) \neq -f_1(x), \forall x \in X$ sont homotopes.

Exercice 3. Considérons deux espaces X et Y ayant le même type d'homotopie. Montrer que si X est connexe par arcs il en est de même pour Y.

Exercice 4. Dans $\mathbb{C}$, on dénote par C_p le cercle de centre p et rayon 1. Soient $X = C_{-1} \cup C_1$, $Y = C_{-2} \cup C_2 \cup [-1, 1]$, et $Z = C_0 \cup [-\mathrm{i}, \mathrm{i}]$. Montrer que $X \simeq Y \simeq Z$ (en donnant des équivalences d'homotopie explicites).

Exercice 5. Montrer que le complémentaire de $\mathbb{S}^q$ dans $\mathbb{S}^n$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{n-q-1}$, i.e. montrer que $\mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^q \simeq \mathbb{S}^{n-q-1}$ pour $q, n \in \mathbb{N}, q \leq n$.

Exercice 6. Soit X un espace topologique. On note $\pi_0(X)$ l'ensemble de ses composantes connexes par arcs, c'est-à-dire $\pi_0(X) = X/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence définie par $x\mathcal{R}y \iff \exists \gamma : [0, 1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On notera $[x]$ la classe d'équivalence de $x \in X$ dans $\pi_0(X)$.
Démontrer les assertions suivantes :

(a) Une application continue $f : X \to Y$ détermine une application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, définie par $\pi_0(f) : [x] \mapsto [f(x)]$.

(b) Si $f, g : X \to Y$ continues sont homotopes alors $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.

(c) Si X et Y ont même type d'homotopie alors $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$ sont en bijection.

(d) L'ensemble $\pi_0(X \times Y)$ est en bijection avec $\pi_0(X) \times \pi_0(Y)$.

Rétractions.

Exercice 7. Une partie A d'un espace topologique X est dite *contractile dans* X si l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est homotope à une application constante. Montrer que si $q < n$, la q-sphère $\mathbb{S}^q$ est contractile dans $\mathbb{S}^n$.

Exercice 8. Notons $\iota : A \hookrightarrow X$ l'inclusion d'une partie A d'un espace topologique séparé X. Montrer que s'il existe une rétraction $r : X \to A$, alors A est fermé dans X.

Exercice 9. Soient $a = (1, 0)$ et $b = (-1, 0)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Soit C_a le cercle de centre a et rayon 1 et C_b le cercle de centre b et rayon 1. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$ se rétracte par déformation sur $C_a \cup C_b$.

Exercice 10. Soit $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ le tore, Y la bouteille de Klein et $Z = \mathbb{RP}^2$ le plan projectif réel.

(a) Le groupe des automorphismes de M agit transitivement sur M, avec $M = X, Y, Z$.

On dénote par $M^* = M \setminus \star$ l'espace M privé d'un point.

(b) Déterminer quels espaces parmi X^*, Y^*, Z^* sont homotopiquement équivalent entre eux.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^2$ considerons $A = [0,1] \times \{0\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \{x\} \times [0,1]$. Soit $X = A \cup E_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_{1/n}$.

(a) Montrer que X se rétracte par déformation forte sur $\{(0,0)\}$.

(b) Montrer que X se rétracte par déformation sur $\{(0,1)\}$.

(c) Montrer qu'il n'existe pas de rétracte par déformation forte de X sur $\{(0,1)\}$.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^2$ considerons $A = [0,1] \times \{0\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \{x\} \times [0, 1-x]$.
Soit $X = A \cup E_0 \cup \bigcup_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} E_x$.

(a) Montrer que X se rétracte par déformation forte sur $p \in X$ ssi $p \in A$. .

Soit maintenant X' obtenu à partir de X en appliquant une rotation de centre $(0,0)$ et angle $\pi/2$, suivie d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = 1/2$. Soit $Y = X \cup X'$ et $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \tau^n(Y)$, avec $\tau(x,y) = (x+1, y-1)$ la translation de $(+1,-1)$.

(b) Montrer que Z est un espace contractile.

(c) Montrer que Z n'admet pas de rétracte par déformation forte sur aucun de ses points.

Exercice 13. (**Cylindre d'application - Mapping cylinder**) Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. On définit son *mapping cylindre* M_f comme $((X \times I) \sqcup Y)/\mathcal{R}$ où $I = [0,1]$ et $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x,1)\ \mathcal{R}\ f(x)$ pour $x \in X$.

(a) Montrer que M_f admet une rétraction par déformation forte sur Y.

(b) Montrer que l'application $j_X : X \to M_f$ qui à x associe la classe de $(x,0)$ dans M_f est un homéomorphisme sur son image.

(c) Montrer que si f est une équivalence d'homotopie alors M_f admet une rétraction par déformation forte sur X, identifié à $j_X(X)$ dans M_f.

(d) En déduire que deux espaces topologiques X et Y ont le même type d'homotopie si, et seulement si, il existe un espace topologique Z qui les "contient" et qui admet une rétraction par déformation forte sur chacun d'entre eux.

Adjonction cellulaire.

Exercice 14. Considerons $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$, $A = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| \leq 1\}$ and $B = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0, y^2+z^2 = 1\}$. Soit $X = S \cup A$. Montrer que X/A est homotopiquement équivalent à X/B.

Exercice 15 (**Suspension réduite**)**.** Soit X un espace topologique, et $S(X) = X \times [-1,1]/X \times \{-1\}, X \times \{+1\}$ la suspension sur X. Soit x_0 un point dans X. La *suspension réduite* de X avec point base x_0 est donnée par

$$\Sigma(X, x_0) = S(X)/A,$$

où A est l'image de $\{x_0\} \times [-1,1]$ par la projection naturelle $X \times [-1,1] \to S(X)$.

(a) Montrer que si X est un complexe cellulaire et x_0 est une 0-cellule de X, alors $\Sigma(X,x_0)$ est homotopiquement équivalent à $S(X)$.

Soit maintenant $X = \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^m$ le bouquet de deux sphères, obtenu en identifiant un point $p_0 \in \mathbb{S}^n$ et $q_0 \in \mathbb{S}^m$. Notons par x_0 l'image de p_0 (ou q_0) par rapport à la projection naturelle de $\mathbb{S}^n$ (ou $\mathbb{S}^m$) à X.

(b) Montrer que $\Sigma(X,x_0) \cong \mathbb{S}^{n+1} \vee \mathbb{S}^{m+1}$.

Exercice 16. Dans $\mathbb{C}$, on dénote par C_p le cercle de centre p et rayon 1. Soient $X_1 = C_{-1} \cup C_1 \cup C_{\mathrm{i}\sqrt{3}}$, $X_2 = C_{-2} \cup C_0 \cup C_2$, et X_3 le bouquet de trois $\mathbb{S}^1$.

(a) Pour quels i,j les espaces X_i et X_j sont homéomorphes ?

(b) Pour quels i,j les espaces X_i et X_j ont le même type d'homotopie ?